

Lista 4 (poziom podstawowy)

Zad. 1 (1 pkt.) Oblicz wartość wyrażenia $\log k + \log(k^2/100) - \log(k^3/10)$, gdzie $k > 0$.

Zad. 2 (1 pkt.) Rozwiąż równanie $\frac{(3x^2-6x)(x^2-9)}{(x-2)(x-3)^2} = 0$ w zbiorze liczb rzeczywistych.

Zad. 3 (2 pkt.) Wykaż, że nie istnieje ciąg arytmetyczny, którego wyrazami (niekoniecznie kolejnymi) są liczby $a=2\sqrt{2}$, $b=4$, $c=4\sqrt{2}$.

Zad. 4 (2 pkt.) Wykaż, że suma trzech kolejnych liczb całkowitych jest podzielna przez 3.

Zad. 5 (2 pkt.) Wykaż, że liczba $1/(1+\sqrt{2})+1/(\sqrt{2}+\sqrt{3})+1/(\sqrt{3}+\sqrt{4})$ jest liczbą całkowitą.

Zad. 6 (2 pkt.) Okres T drgań wahadła wyraża się wzorem $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, gdzie l oznacza długość wahadła, a g oznacza przyśpieszenie grawitacyjne. Przyśpieszenie ziemskie wynosi $g_Z = 9,81 \text{ m/s}^2$, a przyśpieszenie grawitacyjne na Księżycu wynosi $g_K = 1,62 \text{ m/s}^2$. Oblicz stosunek okresu drgań T_K tego wahadła, gdyby znajdowało się ono na Księżycu, do okresu drgań T_Z tego samego wahadła znajdującego się na Ziemi. Wynik podaj z dokładnością do 0,01.

Zad. 7 (2 pkt.) Suma pierwszych pięciu wyrazów ciągu arytmetycznego o różnicy 4 jest trzy razy mniejsza od sumy następujących pięciu wyrazów. Oblicz pierwszy wyraz tego ciągu.

Zad. 8 (3 pkt.) Rozwiąż równanie a) $-x^3 + 13x - 12 = 0$ b) $x^3 - 3x + 2 = 0$ c) $x^4 - 7x^2 + 6x = 0$.

Zad. 9 (3 pkt.) Iloraz skończonego ciągu geometrycznego jest równy $1/3$, trzeci wyraz tego ciągu jest równy $1/9$, a suma wszystkich wyrazów to $364/243$. Oblicz liczbę wyrazów tego ciągu.

Zad. 10 (3 pkt.) Kwadrat $ABCD$ wpisano w wycinek koła wyznaczony przez kąt środkowy KSL o mierze 45° w taki sposób, że wierzchołki A i B leżą na promieniu SK , wierzchołek D leży na promieniu SL , a wierzchołek C leży na łuku KL . Oblicz stosunek pola kwadratu $ABCD$ do pola wycinka kołowego KSL .

Zad. 11 (3 pkt.) Wykaż, że trójkąt o wierzchołkach w punktach $A=(-15,-8)$, $B=(-6,4)$, $C=(-19,-5)$ jest prostokątny oraz wyznacz współrzędne punktu przecięcia środkowych tego trójkąta.

Zad. 12 (4 pkt.) Oblicz pole trójkąta ABC , jeżeli jego podstawa AB zawiera się w prostej o równaniu $y = -3x + 6$, wierzchołek C ma współrzędne $(3,7)$, a wierzchołki A i B leżą odpowiednio na osi Oy oraz Ox .

Zad. 13 (4 pkt.) Wyznacz promień okręgu oraz współrzędne jego środka S leżącego na prostej o równaniu $y = 4x + 2$ wiedząc, że punkty $A = (-8,12)$ i $B = (-2,4)$ są końcami cięciwy tego okręgu.